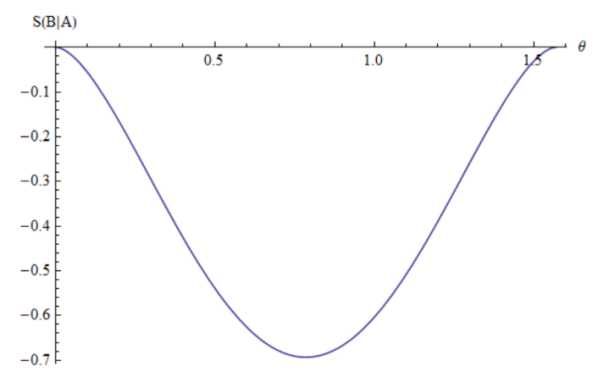
**ΔΙΕΜΠΛΟΚΗ Η ΟΧΙ? – Η ΠΡΟΟΠΤΙΚΗ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ**

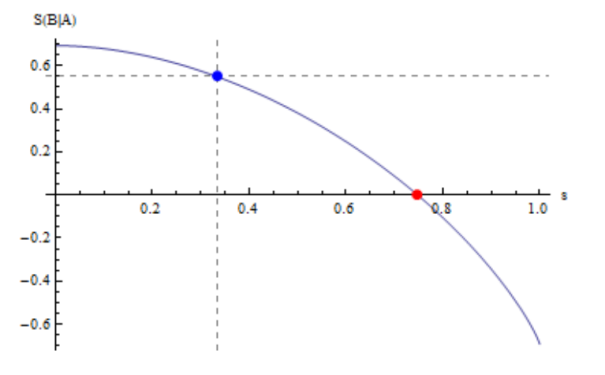
Για οποιονδήποτε έχει ασχοληθεί με την Κβαντική Θεωρία είναι αντιληπτό ότι πρόκειται για μία μαθηματική θεωρία την οποία πολλά φυσικά συστήματα ή μοντέλα πρέπει με κάποιο τρόπο να υπακούν. Η φαινομενολογία της δεν μοιάζει να είναι εγγενής ανάγκη της θεωρίας όπως για παράδειγμα στην περίπτωση του Ηλεκτρομαγνητισμού ή της Σχετικότητας. Αντί αυτού, πρόκειται για μία θεωρία που για να καταφέρει να κάνει προβλέψεις, απαιτεί επιπλέον υποθέσεις και κίνητρα από την υπόλοιπη φυσική. Για παράδειγμα, στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου χρειάζεται κανείς να περιγράψει ένα σύστημα μέσω της Λαγκραντζιανής (κινητικούς όρους, τρόπους αλληλεπίδρασης σωματιδίων κλπ.) και στην συνέχεια να επιβάλει τους “κβαντικούς κανόνες” προκειμένου να προβλέψει πειραματικά αποτελέσματα. Αυτή η φαινόμενη απουσία συγκεκριμένης οντολογίας της Κβαντικής Θεωρίας, είναι που την κάνει αρκετά αφηρημένη, και μας κάνει να πιστεύουμε σε πιθανή εφαρμογή της σε οποιοδήποτε φυσικό σύστημα προκύψει. Η υποκατηγορία των φυσικών συστημάτων που θα συζητήσουμε είναι τα διακριτά συστήματα λίγων διαστάσεων (έως 4) λόγω της απλότητας τους και των πολλών εφαρμογών τους σε πειράματα. Γνωστά παραδείγματα τέτοιων συστημάτων είναι το σπιν του ηλεκτρονίου και η πόλωση του φωτονίου. Οι καταστάσεις τους είναι συνδυασμός (η σωστότερα *υπέρθεση*) δύο διακριτών καταστάσεων spin up-spin down για το ηλεκτρόνιο, και left-rigth polarization αντίστοιχα για το φωτόνιο.

Η Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας είναι ένας τομέας που προσπαθεί να εφαρμόσει τους “κβαντικούς κανόνες” στην επιστήμη της πληροφορίας, η αλλιώς, προσπαθεί να περιγράψει κβαντικά συστήματα ως ανάλυση, μετάδοση και επεξεργασία πληροφορίας. Ένα από τα μεγέθη της θεωρίας της πληροφορίας το οποίο βρίσκουμε πολύ χρήσιμο και στην κβαντική του μορφή είναι η εντροπία. Γενικά, η εντροπία είναι μια ποσότητα που έχει στατιστική προέλευση. Σε κάθε περίπτωση εντροπίας, είτε πρόκειται για θερμοδυναμική, κλασική ή κβαντική, αυτό για το οποίο προσπαθεί να μας διαφωτίσει είναι η τυχαιότητα. Για τον λόγο αυτό, κάθε εντροπία είναι μία συνάρτηση, ή απλούστερα ένα μαύρο κουτί το οποίο παίρνει ως είσοδο πληροφορίες για μία στατιστική κατανομή και δίνει πίσω έναν πραγματικό αριθμό. Αν η εντροπία είναι θερμοδυναμική (Gibbs) στην είσοδο μπορεί να έχει μία κατανομή πιθανότητας της πυκνότητας, αν είναι πληροφοριακή (Shannon) θα έχει μία διακριτή κατανομή πιθανότητας ενώ αν είναι κβαντική, θα έχει ως είσοδο μία κβαντική κατάσταση. Η ερμηνεία της εντροπίας, δηλαδή του πραγματικού αριθμού που θα πάρουμε ως αποτέλεσμα, είναι αυτό που αποτελεί αντικείμενο έρευνας στις κβαντικές εντροπίες.

Το φαινόμενο της Κβαντικής Θεωρίας που ενδιαφέρει την επιστημονική κοινότητα περισσότερο από κάθε άλλο, είναι η *κβαντική διεμπλοκή* (quantum entanglement). Η περιγραφή και ποσοτικοποίηση αυτού του φαινομένου αποτελεί αντικείμενο έρευνας στην Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας, ειδικότερα από την εποχή του Bell και την ανακάλυψη των ομώνυμων ανισοτήτων. Μία διεμπλεγμένη κβαντική κατάσταση είναι ένα σύστημα που δεν μπορεί να περιγραφεί ως σύνθεση των υποσυστημάτων του. Μπορεί μόνο να περιγραφεί σαν ολότητα, με αποτέλεσμα να “αναδύονται” φαινόμενα (σαν την διεμπλοκή) που ίσως να μην γίνεται να υπάρξουν μεμονωμένα στα υποσυστήματά της. Αν μία κβαντική κατάσταση δεν είναι *διεμπλεγμένη* τότε την αποκαλούμε *διαχωρίσιμη*. Το πρόβλημα λοιπόν που προκύπτει είναι: Πως μπορώ να συμπεράνω γνωρίζοντας μια κβαντική κατάσταση εάν είναι διεμπλεγμένη ή διαχωρίσιμη? Για παράδειγμα, η παραβίαση των ανισοτήτων Bell είναι ικανή συνθήκη ώστε μία κβαντική κατάσταση να θεωρηθεί διεμπλεγμένη, όχι όμως αναγκαία συνθήκη. Το ιδανικό σενάριο θα ήταν να έχουμε στα χέρια μας ένα κριτήριο το οποίο θα μπορεί να υπολογιστεί και να ελεγχθεί εύκολα για οποιαδήποτε κβαντική κατάσταση, και θα μας επέτρεπε να αποφανθούμε με σιγουριά αν η κατάσταση είναι διαχωρίσιμη ή όχι. Μέχρι στιγμής τέτοια ικανά και αναγκαία κριτήρια έχουν βρεθεί μόνο για συγκεκριμένες κλάσεις κβαντικών καταστάσεων (π.χ. Werner states) και όχι για οποιοδήποτε αυθαίρετο κβαντικό σύστημα.

Ένας από τους λόγους που οι Κβαντικές Εντροπίες κεντρίζουν το επιστημονικό ενδιαφέρον είναι ότι ενδέχεται να αποτελούν χρήσιμα μέτρα διεμπλοκής. Τα μέτρα διεμπλοκής προσπαθούν να ποσοτικοποιήσουν το πόσο διεμπλεγμένο είναι ένα κβαντικό σύστημα και κατ’ επέκταση το αν είναι διαχωρίσιμο. Έτσι όλες οι κβαντικές εντροπίες, με πιο διαδεδομένη την εντροπία von Neumann, έχουν κάποιες ιδιότητες που μας ενδιαφέρουν. Προσπαθούμε δηλαδή, τoν πραγματικό αριθμό που θα πάρουμε ως αποτέλεσμα, να τον ερμηνεύσουμε και να μπορέσουμε να πληροφορηθούμε για τις ιδιότητες του συστήματος. Με χρήση της εντροπίας von Neumann, ορίζουμε την δεσμευμένη (conditional) εντροπία von Neumann. Αυτή είναι μία εντροπία που “συγκρίνει” δύο υποσυστήματα της κβαντικής κατάστασης. Έχει την ιδιότητα, όταν η κβαντική κατάσταση είναι *καθαρή* (δηλαδή χωρίς “κλασική” αβεβαιότητα),να είναι αρνητική αν και μόνο αν το σύστημα είναι διεμπλεγμένο.

Ας πάρουμε ως παράδειγμα λοιπόν μία κατάσταση που έχει υλοποιηθεί σε εργαστήριο μεταξύ ενός φωτονίου και μίας “κβαντικής τελείας” εντός της οποία είναι παγιδευμένο ένα ηλεκτρόνιο. Οι δύο πιθανές καταστάσεις του συστήματος είναι: **οριζόντια πόλωση φωτός-“κβαντική τελεία” σε διεγερμένη κατάσταση** και **κατακόρυφη πόλωση φωτός-“κβαντική τελεία” στη μη διεγερμένη κατάσταση**. Βλέπουμε ότι υπάρχει μία συσχέτιση μεταξύ της κατάστασης που βρίσκεται το φωτόνιο και της κατάστασης που βρίσκεται η “κβαντική τελεία”. Απλούστερα, αν γνωρίζουμε (μετά από μέτρηση) την κατάσταση πόλωσης του φωτονίου τότε γνωρίζουμε την κατάσταση της “τελείας” και αντιστρόφως. Αυτή η αυστηρή συσχέτιση είναι που κάνει το σύστημά μας να θεωρείται διεμπλεγμένη κατάσταση. Στο σχήμα βλέπουμε την τιμή της δεσμευμένης εντροπίας von Neumann για μία ελεύθερη παράμετρο θ, που περιγράφει τις πιθανότητες να μετρήσουμε τις δύο καταστάσεις του συστήματος. Όταν το θ είναι στην τιμή π/4 οι πιθανότητα να βρούμε το σύστημα σε μία από τις δύο καταστάσεις είναι ½. Για οποιοδήποτε άλλο θ έχουμε διαφορετικές πιθανότητες για την κάθε κατάσταση. Την περίπτωση όπου οι καταστάσεις είναι ισοπίθανες την ονομάζουμε μέγιστα διεμπλεγμένη και έχει την ελάχιστη τιμή της δεσμευμένης εντροπίας.

Δυστυχώς όμως τα πράγματα περιπλέκονται όταν πηγαίνουμε σε γενικότερα κβαντικά συστήματα, δηλαδή *μεικτές κβαντικές καταστάσεις* (εν αντιθέσει με τις καθαρές). Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει περιορισμένη γνώση για τα κριτήρια του πότε είναι μία κατάσταση διαχωρίσιμη ή όχι. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον προκύπτει από τις λεγόμενες καταστάσεις Werner, οι οποίες μπορεί να είναι διεμπλεγμένες χωρίς να παραβιάζουν τις ανισότητες Bell και με θετική δεσμευμένη εντροπία von Neumann. Στο σχήμα φαίνεται η δεσμευμένη εντροπία μίας κατάστασης Werner. Από το μπλε σημείο και προς τα δεξιά η κατάσταση είναι διεμπλεγμένη. Παρ’ όλα αυτά την εντροπία την βρίσκουμε θετική σε κάποιες τιμές τις παραμέτρου. Αυτό το παράδειγμα τονίζει και την δυσκολία του προβλήματος της διαχωρισιμότητας μίας αυθαίρετης κβαντικής κατάστασης, μιας και εδώ το κριτήριο της αρνητικότητας που είχαμε στις καθαρές καταστάσεις καταρρέει.

Υπάρχουν πολλές κβαντικές εντροπίες. Η κάθε μία μπορεί να είναι χρήσιμη για ένα διαφορετικό τομέα της Φυσικής και των Μαθηματικών. Υπάρχει όμως περίπτωση κάποιες εντροπίες να δίνουν για το ίδιο σύστημα διαφορετικές πληροφορίες ανάλογα με τις ιδιότητές τους. Δύο από αυτές που συνήθως αναφέρονται μαζί με την εντροπία von Neumann, είναι η εντροπία Renyi (με πολλές εφαρμογές στην κλασσική θεωρία πληροφορίας) και η εντροπία Tsallis (πολύ χρήσιμη στην στατιστική μηχανική). Κάθε εντροπία υπάρχει και στην δεσμευμένη της μορφή, δηλαδή προσαρμόζεται ώστε να αφορά τα υποσυστήματα της συνολικής κατάστασης, και έτσι μπορούν να δώσουν πληροφορίες για την διαχωρισιμότητα ή την διεμπλοκή της.

Αξίζει και μία αναφορά, σε μία ειδική περίπτωση εντροπίας που λέγεται Σχετική Εντροπία (Relative Entropy) και ειδικότερα στην κβαντική της μορφή. Αυτή η εντροπία, δεν ορίζεται με γνώμονα ένα σύστημα ή τα υποσυστήματά του (όπως οι προηγούμενες), αλλά συγκρίνει δύο εντελώς διαφορετικά κβαντικά συστήματα μεταξύ τους. Η πιθανή χρησιμότητα αυτής της εντροπίας βασίζεται στην ιδέα ότι μπορεί να γνωρίζουμε ακριβώς την συμπεριφορά ενός εκ των δύο συστημάτων. Συγκρίνοντας την γνωστή σε εμάς κατάσταση, με αυτή που δεν γνωρίζουμε, μπορούμε να βγάλουμε πάλι συμπεράσματα για την διεμπλοκή του συστήματος και όχι μόνο.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτουν δύο πολύ εύλογα ερωτήματα. Γιατί αξίζει να γνωρίζουμε εύκολα και γρήγορα αν μία κατάσταση είναι διεμπλεγμένη η όχι? Η απάντηση είναι απλή και προφανής. Λόγω της πληθώρας εφαρμογών της διεμπλοκής στις νέες τεχνολογίες επικοινωνίας, κρυπτογραφίας, επεξεργασίας κλπ. Το δεύτερο ερώτημα είναι πιο πολύπλοκο και με λιγότερο σαφή απάντηση. Έστω ότι στο μέλλον γνωρίζουμε όλες τις ιδιότητες των κβαντικών εντροπιών, και γενικότερα των μέτρων διεμπλοκής. Για ποιο λόγο να προσδιορίσουμε με έναν μόλις αριθμό μία συνολικά γνωστή κβαντική κατάσταση? Θα μπορούσαμε απλά να μελετήσουμε απευθείας το σύστημα χωρίς να ασχοληθούμε με εντροπίες. Είναι μόνο θέμα απλοποίησης του προβλήματος? Η απάντηση είναι μάλλον όχι. Έχουν προταθεί πειράματα όπου μετράνε απ’ ευθείας την τιμή της εντροπίας μία αυθαίρετης κβαντικής κατάστασης. Αυτό σημαίνει ότι είναι πιθανό να μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για την διαχωρισιμότητα μίας κατάστασης χωρίς να γνωρίζουμε ποια είναι αυτή!